stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE ZN 35/70 DECEMBER

J.M. GEIJSEL

SPECIALE FUNKTIES OVER LICHAMEN VAN KARAKTERISTIEK P

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Samenvatting. In dit artikel wordt een overzicht gegeven van de door Carlitz ingevoerde speciale funkties over lichamen van karakteristiek p. Met name worden besproken een analogon van de exponentiaalfunktie en besselfunkties. Bovendien worden m.b.v. algemene analytische eigenschappen van machtreeksen over lichamen van karakteristiek p enige eigenschappen afgeleid over de nulpunten van bovengenoemde funkties.

Inhoud

Speciale funkties over lichamen van karakteristiek p

1. Het polynoom $\psi_k(t)$.

Zij $\mathbb{F}_q$ een Galoislichaam met $q = p^n$ elementen (p priem). Definieer de polynomen:

$$F_0 = 1 \; ; \; F_k = \prod_{j=0}^{k-1} (x^{q^{k-1}} - x^{q^j}) \;, \quad k = 1,2,\ldots$$

$$L_0 = 1 \; ; \; L_k = \prod_{j=1}^{k} (x^{q^j} - x) \qquad , \quad k = 1,2,\ldots \; .$$

De graad van een polynoom noteren we met dg, b.v. dg $F_k = kq^k$.
Met de notatie

$$[j] = x^{q^j} - x \qquad \text{voor } j \geq 1,$$

zijn F_k en L_k voor $k \geq 1$ ook te schrijven in de vorm

$$F_k = [k][k-1]^q \ldots [1]^{q^{k-1}}$$

$$L_k = [k][k-1]\ldots[1] \; .$$

Verder noteren we:

$$\left[{k \atop j}\right] := \frac{F_k}{F_j L_{k-j}^{q^j}} \; .$$

In 1935 beschouwde L. Carlitz [2] de volgende polynomen over $\mathbb{F}_q$:

$$\psi_k(t) := \prod_{dgE<k} (t-E) \;, \quad k = 1,2,\ldots \;,$$

waarbij E alle polynomen van de graad < k doorloopt. De coefficienten van $\psi_k(t) \in \mathbb{F}_q[t]$ zijn te berekenen door $\prod_{dgE<k} (t-E)$ op te vatten als produkt van de q^k lineaire vormen

$$\prod_{c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{F}_q} (t + c_1 + c_2 x + \ldots + c_k x^{k-1}) \; .$$

Dit volgt uit het volgende

Lemma 1.1 [4]

Zij $t_0 + c_1t_1 + \ldots + c_kt_k$ een lineaire vorm met $c_j \in \mathbb{F}_q$ voor $j = 1,2,\ldots,k$ en noteren we

$$D(t_0,t_1,\ldots,t_k) = |t_i^{q^{k-j}}|_{i,j=0,\ldots,k} ,$$

dan geldt

$$\prod_{c_i \in \mathbb{F}_q} (t_0+c_1t_1+\ldots+c_kt_k) = \frac{D(t_0,t_1,\ldots,t_k)}{D(t_1,\ldots,t_k)} . \tag{1.1}$$

Bewijs

Voor $k = 1$ is de bewering triviaal. Zij nu $k > 1$ en onderstel (1.1) is juist voor $k-1$.

Daar

$$\prod_{\substack{c_i \in \mathbb{F}_q \\ i=1,\ldots,k}} (t_0+c_1t_1+\ldots+c_kt_k)$$

$$= \prod_{\substack{c_i \in \mathbb{F}_q \\ i=1,\ldots,k-1}} \{(t_0^q-t_k^{q-1}t_0) + \ldots + c_{k-1}(t_{k-1}^q-t_k^{q-1}t_{k-1})\}$$

$$= \frac{D(D(t_0,t_k),\ldots,D(t_{k-1},t_k))}{t_k^{q^{k-1}} D(D(t_1,t_k),\ldots,D(t_{k-1},t_k))}$$

is (1.1) equivalent met

$$\frac{D(D(t_0,t_k),\ldots,D(t_{k-1},t_k))}{t_k^{q^{k-1}} D(D(t_1,t_k),\ldots,D(t_{k-1},t_k))} = \frac{D(t_0,t_1,\ldots,t_k)}{D(t_1,\ldots,t_k)} . \tag{1.2}$$

Voor $k = 2$ wordt dit

$$\frac{D(D(t_0,t_2),D(t_1,t_2))}{t_2^q} = D(t_0,t_1,t_2) . \tag{1.3}$$

Door uitschrijven van de betreffende determinanten vinden we

$$t_2^{-q} D(D(t_0,t_2),D(t_1,t_2)) = D(t_0,t_1,t_2) -$$

$$- t_2^{1-q} \sum_{j=0}^{2} (-1)^{2-j} t_j^q D^q(t_0,\ldots,\overset{j}{\vee},\ldots,t_2) .$$

Nu is de laatste som de determinant van een matrix met twee gelijke rijen, dus is 0. Hiermee is (1.3) bewezen. Zij $k > 2$ en stel (1.2) is juist voor $m = 2,3,\ldots,k-1$. We brengen (1.2) eerst in een andere vorm. Uit de inductie-onderstelling en (1.3) volgt nl. dat

$$D(D(t_1,t_k),\ldots,D(t_{k-1},t_k)) = t_k^{q^{k-2}+\ldots+q}\, D(t_1,\ldots,t_k)$$

zodat (1.2) te schrijven is als

$$D(D(t_0,t_k),\ldots,D(t_{k-1},t_k)) = t_k^{q^{k-1}+q^{k-2}+\ldots+q}\, D(t_0,\ldots,t_k) \qquad (1.4)$$

Het bewijs van (1.4) verloopt analoog aan het bewijs van (1.3), met gebruikmaking van de inductieonderstelling.

<u>Gevolg 1.2</u>

$$\psi_k(t) = \prod_{\mathrm{dg}E<k} (t-E) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \left[{k \atop j}\right] t^{q^j} .$$

<u>Bewijs</u>

$$\prod_{\mathrm{dg}E<k} (t-E) = \prod_{c_i\in\mathbb{F}_q} (t+c_1+c_2x+\ldots+c_kx^{k-1}) = \frac{D(t,1,x,\ldots,x^{k-1})}{D(1,x,\ldots,x^{k-1})} .$$

Nu is $D(t,1,x,\ldots,x^{k-1}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\, t^{q^j} \prod_{\substack{\mu>\nu \\ \mu,\nu\neq j}} (x^{q^\mu}-x^{q^\nu}) =$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} t^{q^j} \frac{\prod_{\mu=1}^{k} \prod_{\nu=0}^{\mu-1} (x^{q^\mu} - x^{q^\nu})}{\prod_{\nu=0}^{j-1} (x^{q^j} - x^{q^\nu}) \prod_{\mu=j+1}^{k} (x^{q^{\mu-j}} - x)^{q^j}}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\, t^{q^j} \frac{F_1 \dots F_k}{F_j \cdot L_{k-j}^{q^j}}$$

en $D(1,x,\dots,x^{k-1}) = F_1 \dots F_{k-1}$, zodat

$$\prod_{dgE<k} (t-E) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\, t^{q^j} \frac{F_k}{F_j \cdot L_{k-j}^{q^j}} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \left[{k \atop j}\right] t^{q^j} .$$

<u>Opmerking</u>. $\psi_k(t)$ is een lineaire funktie, d.w.z.

$$\begin{cases} \psi_k(ct) = c\psi_k(t) & \text{voor } c \in \mathbb{F}_q \\ \psi_k(t+u) = \psi_k(t) + \psi_k(u) . \end{cases}$$

Bovendien is $\psi_k(E) = 0$ voor alle E met dg $E < k$.
Definieer $\psi_0(t) = t$.

We kunnen $\left[{k \atop j}\right]$ vergelijken met een binomiaalcoëfficient; we hebben b.v. voor $j > 0$ de gelijkheden

$$\left[{k \atop j}\right] = \frac{x^{q^k} - x}{x^{q^j} - x} \left[{k-1 \atop j-1}\right]^q \tag{1.5}$$

en

$$\left[{k \atop j}\right] = \left[{k-1 \atop j-1}\right]^q + F_{k-1}^{q-1} \left[{k-1 \atop j}\right] , \tag{1.6}$$

terwijl voor de binomiaalcoëfficient geldt

$$\binom{k}{j} = \frac{k}{j} \binom{k-1}{j-1} \quad \text{en} \quad \binom{k}{j} = \binom{k-1}{j-1} + \binom{k-1}{j} .$$

Bovendien is $[{k \atop j}]$ weer een polynoom. Dit volgt direkt uit bovenstaande, immers

$$[{1 \atop 1}] = 1 \ , \ [{1 \atop 0}] = \frac{F_1}{F_0 L_1} = 1 \ ;$$

voor $j > 1$ volgt de bewering met volledige inductie uit (1.6).

Voor $j = 0$ is $[{k \atop 0}] = \frac{F_k}{1.L_k} = \frac{[k][k-1]^q \ldots [1]^{q^{k-1}}}{[k][k-1]\ldots[1]}$ en dit is een polynoom.

Uit (1.5) en (1.6) volgt dat $\psi_k(t)$ voldoet aan de relaties

$$\begin{cases} \psi_k(xt) - x\psi_k(t) = (x^{q^k} - x)\ \psi_{k-1}^q(t) \\ \psi_k(t) = \psi_{k-1}^q(t) - F_{k-1}^{q-1}\ \psi_{k-1}(t)\ . \end{cases} \tag{1.7}$$

Voor ieder lineair polynoom $f \in \mathbb{F}_q[t]$ kunnen we operatoren Δ en Δ^r ($r \geq 2$) invoeren als volgt:

$$\begin{cases} \Delta f(t) := f(xt) - xf(t) \\ \Delta^r f(t) := \Delta^{r-1} f(xt) - x^{q^{r-1}}\ \Delta^{r-1} f(t). \end{cases}$$

Merk op dat $\Delta^2 \neq \Delta.\Delta$; verder zijn Δf en $\Delta^r f$ weer lineair.

Voor $\psi_k(t)$ geldt de relatie:

$$\Delta^r \psi_k(t) = \frac{F_k}{F_{k-r}^{q^r}}\ \psi_{k-r}^{q^r}(t)\ . \tag{1.8}$$

2. Het lichaam F

We kunnen op $\mathbb{F}_q[x]$ een niet-archimedische valuatie $|\ |$ invoeren als volgt:

$$\begin{cases} |0| = 0 \\ |E| = q^{dgE}\ . \end{cases}$$

Deze valuatie is uit te breiden tot het quotientenlichaam $\mathbb{F}_q\{x\}$ van $\mathbb{F}_q[x]$ door te definiëren

$$\left|{}^{E}/_{F}\right| = \frac{|E|}{|F|} \quad .$$

Completering van $\mathbb{F}_q\{x\}$ in deze valuatie levert ons het lichaam bestaande uit elementen η van de vorm

$$\eta = \sum_{n=-\infty}^{n_0} c_n \, x^n \qquad\qquad \text{met } n_0 \in \mathbb{Z} \;\text{ en } c_n \in \mathbb{F}_q \;,$$

waarbij $|\eta| = q^{n_0}$. Merk op dat dit het lichaam is der formele machtreeksen in x^{-1}. De ring der gehelen hierin bestaat uit elementen

$\eta = \sum_{n=-\infty}^{n_0} c_n x^n$ met $n_0 \leq 0$.

Iedere eindige algebraïsche uitbreiding van bovengenoemd lichaam $\mathbb{F}_q((x^{-1}))$ is een lokaal compact, niet discreet, totaal onsamenhangend lichaam. (zie [1], H.6 §9.3).
Adjungeer nu aan $\mathbb{F}_q((x^{-1}))$ alle gebroken machten van x en definieer $|x^{1/m}| \overset{\text{def}}{=} |x|^{1/m} = q^{1/m}$. Noem het zo onstane lichaam F. F is niet algebraïsch afgesloten, want $t^q - t = x$ is niet oplosbaar in F; F is wel volledig m.b.t. de valuatie $|\;|$.

Definitie. Een funktie $f(t)$ heet geheel over F als hij te schrijven is als een voor alle $t \in F$ convergente machtreeks met coëfficiënten in F.

We definiëren nu de operator Δ voor iedere lineaire funktie, aannemend dat de optredende funkties allen convergeren. Een lineaire funktie over F heeft de vorm

$$f(t) = \alpha_0 t + \alpha_1 t^q + \ldots + \alpha_n t^{q^n} + \ldots \qquad \text{met } \alpha_n \in F \;.$$

De funkties

$$\Delta f(t) := f(xt) - xf(t)$$

en

$$\Delta^r f(t) := \Delta^{r-1} f(xt) - x^{q^{r-1}} \Delta^{r-1} f(t)$$

zijn indien bestaand weer lineair.
We noteren f(t) in het vervolg ook wel door $\Delta^0 f(t)$.

Lemma 2.1. Voor iedere lineaire funktie van de vorm

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, t^{q^j}$$

geldt formeel:

$$f(tu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Delta^j f(u)}{F_j} \cdot \psi_j(t) \; .$$

Deze ontwikkeling heeft betekenis indien het rechterlid convergeert, hetgeen voor alle t het geval is als

$$|\Delta^j f(u)| \leq q^{q^j} \; .$$

Bewijs

We kunnen formeel schrijven

$$f(tu) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(u) \, \psi_j(t)$$

en hieruit de $A_j(u)$ als volgt bepalen:
voor t = 1 is $\psi_0(1) = t = 1$ en $\psi_j(t) = 0$ voor $j \geq 1$, zodat $A_0(u) = f(u)$.
Beschouw dan $\Delta f(tu) = f(xt.u) - xf(tu)$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} A_j(u) \, \{\psi_j(xt) - x\psi_j(t)\} \; .$$

Volgens (1.7) is dit echter gelijk aan $\sum_{j=1}^{\infty} A_j(u)(x^{q^j}-x)\psi_{j-1}^q(t)$.
Voor t = 1 krijgen we dan

$$\Delta f(u) = A_1(u)(x^q - x) = A_1(u) F_1 \; ,$$

waarmee $A_1(u)$ bepaald is.
Op analoge wijze bepalen we $A_i(u)$, $i \geq 2$.

3. De funktie $\psi(t)$.

De funktie $\psi_k(t)$ was gedefinieerd als het eindige produkt $\prod_{dgE<k} (t-E)$.
Wanneer we in F een oneindig produkt $\prod_{k=0}^{\infty} (1+\alpha_k)$ met $\alpha_k \in F$ beschouwen, dan convergeert dit produkt als $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ convergeert, m.a.w. als we met $\prod'_{dgE<k}$ aangeven dat we alleen het produkt nemen over primaire polynomen van de graad < k, dan is het produkt

$$\prod'_{0\leq dgE} \left(1 - \frac{t^{q-1}}{E^{q-1}}\right) := \lim_{k\to\infty} \prod'_{0\leq dgE<k} \left(1 - \frac{t^{q-1}}{E^{q-1}}\right)$$

convergent voor alle t. Uitgaande van de funktie $\psi_k(t)$ kunnen we dit produkt anders schrijven; immers

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\, t^{q^j} \frac{F_k}{L_{k-j}^{q^j} F_j} = \psi_k(t)$$

$$= \prod_{dgE<k} (t-E)$$

$$= t \prod'_{dgE<k} \prod_{c=1}^{q-1} (t-cE)$$

$$= t \prod'_{dgE<k} (t^{q-1}-E^{q-1}) .$$

Hieruit volgt

$$t \prod'_{dgE<k} \left(1 - \frac{t^{q-1}}{E^{q-1}}\right) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{t^{q^j}}{F_j} \cdot \frac{L_k}{L_{k-j}^{q^j}} , \tag{3.1}$$

daar

$$\prod_{\mathrm{dg}E<k}' E^{q-1} = (F_{k-1}\, F_{k-2} \cdots F_1)^{q-1} = \frac{F_k}{L_k} .$$

Definieer nu:

$$\eta_k := \frac{(x^q-x)^{\frac{q^k-1}{q-1}}}{L_k} ,$$

dan is (3.1) te schrijven als

$$S_k = t \prod_{\mathrm{dg}E<k}' \left(1 - \frac{t^{q-1}}{E^{q-1}}\right) = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{F_j}\, t^{q^j}\, \eta_{k-j}^{q^j}\, (x^q-x)^{\frac{q^j-1}{q-1}} .$$

Zij $\eta = \lim_{k\to\infty} \eta_k$ en noteer $\eta_k = \eta + \delta_k$, dan is

$$S_k = \frac{1}{\eta_k} \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^j}{F_j}\, t^{q^j}\, \eta^{q^j}\, (x^q-x)^{\frac{q^j-1}{q-1}} +$$

$$+ \frac{1}{\eta_k} \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^j}{F_j}\, t^{q^j}\, \delta_{k-j}^{q^j}\, (x^q-x)^{\frac{q^j-1}{q-1}} +$$

$$+ \frac{1}{\eta_k} \sum_{j=[k/2]+1}^{k} \frac{(-1)^j}{F_j}\, t^{q^j}\, \eta_{k-j}^{q^j}\, (x^q-x)^{\frac{q^j-1}{q-1}} =$$

$$= S_k^{(1)} + S_k^{(2)} + S_k^{(3)} .$$

Daar $|\eta_k| = 1$ voor alle k, geldt

$$|S_k^{(3)}| \le \max_{j \ge [k/2]+1} \frac{1}{|F_j|}\, |t|^{q^j}\, |x^q-x|^{\frac{q^{j-1}}{q-1}} < \varepsilon$$

mits k voldoende groot is; m.a.w. $\lim_{k\to\infty} S_k^{(3)} = 0$.

Zij $M = \max\limits_{0\leq j\leq[k/2]} \frac{1}{|F_j|} |t|^{q^j} |x^q-x|^{\frac{q^j-1}{q-1}}$; daar S_k convergeert is M voor $k > k_0$ onafhankelijk van k, zodat

$$|\delta_{k-j}| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{voor } k \text{ voldoende groot en } \quad 0 \leq j \leq [\tfrac{k}{2}] \ .$$

Hieruit volgt:

$$\lim_{k\to\infty} S_k^{(2)} = 0 \quad .$$

Dus

$$t \mathop{\Pi'}_{E} (1 - \frac{t^{q-1}}{E^{q-1}}) = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} S_k^{(1)} =$$

$$= \frac{1}{\eta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{F_j} t^{q^j} \eta^{q^j} (x^q-x)^{\frac{q^j-1}{q-1}} \ . \tag{3.2}$$

Definieer vervolgens

$$\xi := (x^q-x)^{\frac{1}{q-1}} \eta = \lim_{k\to\infty} \frac{(x^q-x)^{\frac{q^k}{q-1}}}{L_k} \quad , \tag{3.3}$$

dan is (3.2) te schrijven als

$$t\xi \mathop{\Pi'}_{E} (1 - \frac{t^{q-1}}{E^{q-1}}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{F_j} t^{q^j} \xi^{q^j} \quad \text{voor alle } t\in F. \tag{3.4}$$

We definiëren nu de funktie $\psi(t)$ als volgt

$$\psi(t) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{F_j} t^{q^j} \ . \tag{3.5}$$

De funktie $\psi(t)$ heeft de volgende eigenschappen:

I $\psi(t)$ is gedefinieerd voor alle $t\in F$. Dit volgt rechtstreeks uit (3.4). Dus $\psi(t)$ is een gehele funktie.

II Daar uit (3.4) volgt

$$\psi(t) = t \mathop{\Pi'}_{E} (1 - \frac{t^{q-1}}{(\xi E)^{q-1}}) = t \mathop{\Pi}_{E} (1 - \frac{t}{\xi E}) \ ,$$

heeft $\psi(t)$ nulpunten in $t = E\xi$, waarbij E een polynoom is en ξ is gedefinieerd in (3.3); dit zijn ook alle nulpunten van $\psi(t)$ en ze zijn enkelvoudig.

III De nulpunten van $\psi(t)$ liggen, met uitzondering van 0, niet in $\mathbb{F}_q((x^{-1}))$ en

$$\psi(t+E\xi) = \psi(t) .$$

Voor $\psi(t)$ gelden de relaties

$$\Delta\psi(t) = -\psi^q(t)$$

en

$$\Delta^k\psi(t) = (-1)^k \psi^{q^k}(t) .$$

Deze volgen direkt uit de lineariteit van ψ.
Vergelijk dit met de k-de afgeleide van e^{-z}:

$$\frac{d^k}{dz^k} e^{-z} = (-1)^k e^{-z} .$$

Opmerking: In §1 hebben we opgemerkt dat F_j te schrijven was als $F = [j][j-1]^q\ldots[1]^{q^{j-1}}$. De schrijfwijze (3.5) en de operatorrelaties van $\psi(t)$ suggereren dat $\psi(t)$ eenzelfde fundamentele rol vervult als de funktie e^z in de complexe funktietheorie.

Volgens lemma 2.1 en bovenstaande formule heeft $\psi(t)$ de formele expansie

$$\psi(tu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{F_j} \psi^{q^j}(u)\ \psi_j(t) ,$$

welke voor alle t convergeert indien $|\psi(u)| \leq |x|$.
Indien we voor t een polynoom $M\in\mathbb{F}_q((x^{-1}))$ nemen, dan is $\psi_j(M) = 0$ voor $j > \mathrm{dg}\, M = m$, dus dan wordt de expansieformule

$$\psi(Mu) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{F_j} \psi^{q^j}(u)\ \psi_j(M)$$

en deze convergeert voor alle u.

We kunnen $\psi(Mu)$ dus opvatten als een lineair polynoom in $\psi(u)$.

Bewering 3.1. De inverse van $\psi(t)$ is de funktie

$$\lambda(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{L_j} t^{q^j} ,$$

en deze is gedefinieerd voor alle t met $\operatorname{dg} t < \frac{q}{q-1}$.

Bewijs. Voor de inverse moet voldaan zijn aan

$$\psi(\lambda(t)) = t .$$

Dit is equivalent met de bewering

$$\sum_{k=j+i} \frac{(-1)^i}{F_i . L_j^{q^i}} = \begin{cases} 0 & \text{voor } k > 0 \\ 1 & \text{voor } k = 0. \end{cases}$$

Echter deze relatie volgt daar $\left[{k \atop j}\right] = \frac{F_k}{F_i . L_j^{q^i}}$ direkt uit Gevolg 1.2 door door $t = 1$ te substitueren.

De convergentie voor alle t met $\operatorname{dg} t < \frac{q}{q-1}$ volgt door op te merken dat dat in dit geval

$$\operatorname{dg}\left(\frac{t^{q^i}}{L_j}\right) = q^j \operatorname{dg} t - q.\frac{q^j-1}{q-1} \to -\infty .$$

Eigenschappen:

IV $\quad \psi(\lambda(t)) = t \qquad$ als $\operatorname{dg} t < \frac{q}{q-1}$

V $\quad \Delta\lambda(t) = \lambda(xt) - x\lambda(t) = \lambda(t^q)$ als $\operatorname{dg} t < \frac{1}{q-1}$.

De funktie $\lambda(t)$ is voort te zetten over geheel F en wel op de volgende manier:

Zij $U_1 := \{t \in F \mid \operatorname{dg} t < \frac{q}{q-1}\}$ en $U_2 := \{t \in F \mid \operatorname{dg} t < \frac{1}{q-1}\}$.

Kies t, u in U_1 dan geldt wegens eigenschap IV en de lineariteit van ψ:

$$\psi(\lambda(t+u)) = t + u = \psi(\lambda(t)) + \psi(\lambda(u)) = \psi(\lambda(t) + \lambda(u)) .$$

Daar $\psi(\lambda(t+u) + E\xi) = \psi(\lambda(t+u))$ geldt:

$$\lambda(t+u) = \lambda(t) + \lambda(u) \quad \text{mod } \xi, \text{ voor } t,u\in U_1 \tag{3.6}$$

Evenzo geldt:

$$\lambda(ct) = c\lambda(t) \quad \text{mod } \xi, \text{ voor } t\in U_1 \text{ en } c\in \mathbb{F}_q \tag{3.7}$$

Uit V, (3.6) en (3.7) volgt

$$\lambda(xt-t^q) = x\lambda(t) \quad \text{mod } \xi, \text{ voor } t\in U_2.$$

Voor alle u met dg $u < \frac{q}{q-1}$ is $\lambda(u)$ gedefinieerd. Beschouw voor een vaste $u\in F$ met dg $u \geq \frac{q}{q-1}$ de vergelijking

$$u = xt - t^q .$$

Indien deze vergelijking geen oplossing heeft in F, dan adjungeren we een element t_u aan F met $\text{dg}t_u = \frac{1}{q}$ du en $xt_u - t_u^q = u$ en zetten de valuatie van F voort over $F(t_u)$. Ook de definitie van λ is uit te breiden tot alle $t\in F(t_u)$ met dgt $< \frac{q}{q-1}$.

Als $\frac{q}{q-1} \leq u < \frac{q^2}{q-1}$ dan is $\text{dgt}_u < \frac{q}{q-1}$. Definieer dan

$$\lambda(u) = x\lambda(t_u) \quad \text{mod } \xi.$$

Dan is $\lambda(u)$ bepaald mod ξ.

In het algemeen kunnen we $\lambda(u)$ in eindig veel stappen mod ξ bepalen:

$$\frac{q^j}{q-1} \leq \text{dgu} < \frac{q^{j+1}}{q-1} \qquad \text{voor zekere } j\in\{1,2,3,\dots\}.$$

Beschouw de vergelijkingen

$$\begin{array}{lll}
u = xt - t^q & \text{met oplossing } t_1 \text{ en } \frac{q^{j-1}}{q-1} \leq \text{dgt}_1 < \frac{q^j}{q-1} \\
t_1 = xt - t^q & \text{met oplossing } t_2 \text{ en } \frac{q^{j-2}}{q-1} \leq \text{dgt}_2 < \frac{q^{j-1}}{q-1} \\
\vdots & \\
t_{j-1} = xt - t^q & \text{met oplossing } t_j \text{ en dgt}_j < \frac{q}{q-1} .
\end{array}$$

Dan is $\lambda(u)$ mod ξ bepaald door

$$\lambda(u) = x^{j+1}\ \lambda(t_j) \qquad \text{mod } \xi.$$

Eigenschappen: Voor iedere t en u in F voldoet $\lambda(t)$ aan de relaties

$$\psi(\lambda(t)) = t$$

$$\lambda(t+u) = \lambda(t) + \lambda(u) \qquad (\text{mod } \xi)$$

$$\lambda(ct) = c\lambda(t) \qquad (\text{mod } \xi) \quad \text{voor } c\in\mathbb{F}_q\ .$$

4. Analytische eigenschappen van ψ

Uitgaande van de polynomen $\psi_k(t)$ hebben we afgeleid dat de nulpunten voor $\psi(t)$ de verzameling

$$\{E\xi \mid \xi \text{ gedefinieerd in } (3.3),\ E\in\mathbb{F}_q[x]\}$$

is. We kunnen dit ook afleiden uit meer algemene analytische beschouwingen over machtreeksen met coëfficiënten in $\mathbb{F}_q((x^{-1}))$ die voor alle t convergeren. Voor deze analytische theorie gaan we uit van een algebraïsch afgesloten lichaam. We kunnen F echter opvatten als een deellichaam van de algebraïsche afsluiting Φ van $\mathbb{F}_q((x^{-1}))$; de valuatie $|\ |$ op $\mathbb{F}_q((x^{-1}))$ kunnen we voortzetten tot een valuatie $|\ |$ op Φ en Φ is compleet t.o.v. $|\ |$. (zie [7], §78).
Φ is totaal onsamenhangend, immers de verzamelingen $\{t \mid |t| \leq \alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ vormen een omgevingssysteem van 0 en iedere V_α is een gesloten ondergroep van de topologische groep Φ, dus V_α is opgesloten. Het systeem $(V_\alpha)_\alpha$ is dus een omgevingssysteem van 0 bestaande uit opgesloten verzamelingen.
Niet discrete lokaal-compacte lichamen zijn volledig gekarakteriseerd (zie [1], H.6 §9.3). Daar Φ niet isomorf is met een eindige algebraïsche uitbreiding van een lichaam van formele machtreeksen $\mathbb{F}_r((T))$ - waarbij r een macht is van de karakteristiek p - met de kanonieke waardering, is Φ niet locaal compact.

In het volgende maken we gebruik van het feit dat Φ een algebraïsch afgesloten lichaam is met niet-archimedische valuatie $|\ |$ ten opzichte waarvan Φ compleet is. We beschouwen in Φ machtreeksen van de vorm:

$$f(t) = \alpha_h t^h + \alpha_{h+1} t^{h+1} + \ldots \quad \text{met } \alpha_i \in \Phi,\ h \geq 0 \text{ en } \alpha_h \neq 0.$$

Indien we definiëren

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \tag{4.1}$$

dan is het convergentiegebied van $f(t)$ de verzameling $\{t \mid |t| < R\}$. Uitgaande van de machtreeks $f(t)$ is de ligging van de nulpunten van f te bepalen.

Definieer:

$$r_1 = \min_{i>h} \left|\frac{\alpha_h}{\alpha_i}\right|^{\frac{1}{i-h}}, \qquad \text{indien dit minimum bestaat.}$$

$$i_1 = \max_{i>h} \{i \mid \left|\frac{\alpha_h}{\alpha_i}\right|^{\frac{1}{i-h}} = r_1\}, \quad \text{als } r_1 \text{ is gedefinieerd.}$$

Als r_{k-1} en i_{k-1} (voor $k \geq 2$) gedefinieerd zijn, definieer dan r_k en i_k als volgt:

$$r_k = \min_{i>i_{k-1}} \left|\frac{\alpha_{i_{k-1}}}{\alpha_i}\right|^{\frac{1}{i-i_{k-1}}}, \text{ indien dit minimum bestaat.}$$

$$i_k = \max_{i>i_{k-1}} \{i \mid \left|\frac{\alpha_{i_{k-1}}}{\alpha_i}\right|^{\frac{1}{i-i_{k-1}}} = r_k\}, \text{ als } r_k \text{ is gedefinieerd.}$$

We hebben de volgende relatie:

Lemma 4.1. Indien $r_1, r_2, \ldots$ bestaan, dan geldt:

$$r_1 < r_2 < \ldots \leq R\ .$$

Bewijs. Stel r_{k+1} bestaat, dan geldt wegens de minimaliteit van r_k:

$$r_k < \left|\frac{\alpha_{i_{k-1}}}{\alpha_{i_{k+1}}}\right|^{\frac{1}{i_{k+1}-i_{k-1}}} = \left|\frac{\alpha_{i_{k-1}}}{\alpha_{i_k}} \cdot \frac{\alpha_{i_k}}{\alpha_{i_{k+1}}}\right|^{\frac{1}{i_{k+1}-i_{k-1}}} =$$

$$= r_k^{\frac{i_k-i_{k-1}}{i_{k+1}-i_{k-1}}} \cdot r_{k+1}^{\frac{i_{k+1}-i_k}{i_{k+1}-i_{k-1}}} =$$

$$= r_k^{1-\frac{i_{k+1}-i_k}{i_{k+1}-i_{k-1}}} \cdot r_{k+1}^{\frac{i_{k+1}-i_k}{i_{k+1}-i_{k-1}}},$$

waaruit volgt: $r_k < r_{k+1}$.
Voor i voldoende groot geldt:

$$r_k < \left|\frac{\alpha_{i_{k-1}}}{\alpha_{i_k}}\right|^{\frac{1}{i-i_{k-1}}} = \left|\alpha_{i_{k-1}}\right|^{\frac{1}{i-i_{k-1}}} \cdot \left(\frac{1}{|\alpha_i|^{\frac{1}{i}}}\right)^{\frac{i}{i-i_{k-1}}}$$

$$< \left|\alpha_{i_{k-1}}\right|^{\frac{1}{i-i_{k-1}}} \cdot R^{\frac{i}{i-i_{k-1}}} + \varepsilon < R + 2\varepsilon .$$

M.a.w. $r_k \leq R$.

Stelling 4.2. De funktie $f(t) = \alpha_h t^h + \alpha_{h+1} t^{h+1} + \ldots$ met $\alpha_i \in \Phi$, $h \geq 0$ en $\alpha_h \neq 0$ heeft
(a) een nulpunt van de orde h in $t = 0$.
(b) i_1-h nulpunten in Φ met valuatie r_1.
(c) i_k-i_{k-1} nulpunten in Φ met valuatie r_k $(k = 2,3,\ldots)$.
Dit zijn alle nulpunten van f.

Bewijs. (a) is triviaal.
Het bewijs van (b) en (c) verloopt in een aantal stappen. Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen dat $k = 0$.
(i) Zij t_0 nulpunt van f. Dan zijn er i en j met $i > j \geq 0$ zó dat

$$|\alpha_i t_0^i| = |\alpha_j t_0^j| .$$

Uit de constructie van de rij $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ volgt dat de waarde $|\frac{\alpha_j}{\alpha_i}|^{\frac{1}{i-h}}$ in deze rij moet voorkomen.

Conclusie: t_0 nulpunt van $f \Longrightarrow |t_0| = r_k$ voor zekere k.

(ii) Zij f een polynoom, $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$. Daar Φ algebraïsch afgesloten is, is f te schrijven als

$$f(t) = \alpha_0 \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{t}{\beta_i})$$

met $\beta_i \in \Phi$ en $|\beta_1| \leq |\beta_2| \leq \ldots \leq |\beta_n|$.
Zij ν bepaald door de relatie

$$|\beta_1| \leq |\beta_2| \leq \ldots \leq |\beta_\nu| \leq r_1 < |\beta_{\nu+1}| \leq \ldots \leq |\beta_n| .$$

We moeten aantonen: $\nu = i_1$.
Uit de definities van r_1 en i_1 volgt:

$$(*) \quad \begin{cases} |\alpha_0| \leq |\alpha_i| r_1^i & \text{voor } i \leq i_1 \\ |\alpha_0| = |\alpha_{i_1}| r_1^{i_1} & \\ |\alpha_0| \geq |\alpha_i| r_1^i & \text{voor } i > i_1 . \end{cases}$$

M.b.v. de elementair symmetrische funkties is α_j uit te drukken in de nulpunten:

$$\alpha_j = \alpha_0 (-1)^j \, S_j(\frac{1}{\beta_1}, \ldots, \frac{1}{\beta_n}) .$$

Verder volgt uit de definitie van ν dat $\frac{1}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu}$ de enige term van S_ν is met maximale valuatie, dus

$$|S_\nu(\frac{1}{\beta_1}, \ldots, \frac{1}{\beta_n})| = |\frac{1}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu}| ,$$

zodat

$$|\alpha_\nu| = \frac{|\alpha_0|}{|\beta_1||\beta_2|\cdots|\beta_\nu|}$$

Uit (i) volgt dat $|\beta_1| = |\beta_2| = \ldots = |\beta_\nu| = r_1$, dus

$$|\alpha_\nu| = \frac{|\alpha_0|}{r_1^\nu} .$$

Voor $j > \nu$ is $|\beta_j| \geq \ldots \geq |\beta_{\nu+1}| > r_1$ zodat in dit geval

$$|\alpha_j| = |\alpha_0| \; | s_j(\frac{1}{\beta_1}, \ldots, \frac{1}{\beta_n})| \leq \frac{|\alpha_0|}{|\beta_1|\cdots|\beta_j|} =$$

$$= \frac{|\alpha_0|}{r_1^\nu} \cdot \frac{1}{|\beta_{\nu+1}|\cdots|\beta_j|} < \frac{|\alpha_0|}{r_1^j} .$$

M.a.w. voor $j \geq \nu$ is $|\alpha_0| > |\alpha_j| \, r_1^j$ dus

$$\nu = \max\{j \mid |\alpha_j| = \frac{|\alpha_0|}{r_1^j} \} ,$$

zodat $\nu = i_1$.

Op analoge manier bewijzen we (c) met inductie. Stel er is bewezen dat f $i_s - i_{s-1}$ nulpunten heeft met valuatie r_s $(s = 2,\ldots,k-1)$. Zij ν bepaald door de relatie

$$r_{i_{k-1}} < |\beta_{i_{k-1}+1}| \leq \ldots \leq |\beta_\nu| \leq |r_k| < |\beta_{\nu+1}| \leq \ldots \leq |\beta_n| .$$

Volgens de relaties

$$|\alpha_{i_{j-1}}| = |\alpha_{i_j}| \; r_j^{i_j - i_{j-1}} \qquad \text{voor } j \leq k-1 \text{ met } \alpha_{i_0} = \alpha_0$$

geldt

$$|\alpha_\nu| = \frac{|\alpha_0|}{|\beta_1|\cdots|\beta_\nu|} = \frac{|\alpha_0|}{r_1^{i_1} \, r_2^{i_2-i_1} \cdots r_{k-1}^{i_{k-1}-i_{k-2}} \, r_\nu^{\nu-i_{k-1}}} = \frac{|\alpha_{i_{k-1}}|}{r_k^{\nu-i_{k-1}}} .$$

Voor $j > \nu$ volgt dat

$$|\alpha_j| < \frac{|\alpha_{i_{k-1}}|}{r_k^{j-i_{k-1}}} ,$$

m.a.w.

$$\nu = \max \{j \mid |\alpha_j| = \frac{|\alpha_{i_{k-1}}|}{r_k^{j-i_{k-1}}} \} ,$$

dus $\nu = i_k$, zodat f i_k nulpunten met $|t| \leq r_k$ heeft. Wegens de inductie-onderstelling heeft f dan $i_k - i_{k-1}$ nulpunten met valuatie r_k.
Hiermee is de stelling voor een polynoom bewezen. Zij verder
$f = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots$ met $\alpha_0 \neq 0$.

(iii) Stel $i_1 = 0$, dan is $|\alpha_j| \, r_1^j < |\alpha_0|$ voor $j \geq 1$, dus voor $|t| \leq r_1$ is $|f(t)| = |\alpha_0| \neq 0$, m.a.w. f heeft geen nulpunten met $|t| \leq r_1$.

(iv) Zij vervolgens $i_1 > 0$.

(iva) Zij $\varepsilon > 0$ en stel

$$|f(t)| > \varepsilon \qquad \text{voor } |t| \leq r_1 . \tag{**}$$

Daar f convergeert voor $|t| \leq r_1 \leq R$ is er een $n_0 = n_0(\varepsilon)$ zó dat

$$|\alpha_j t^j| < \varepsilon \qquad \text{voor } j > n_0 .$$

Zij $n_1 = \max(n_0, i_1)$, dan is

$$f(t) = \alpha_0 + \ldots + \alpha_{n_1} t^{n_1} + f^*(t) = f_1(t) + f^*(t)$$

waarbij

$$|f_1^*(t)| < \varepsilon$$

$$r_1(f_1) = r_1(f) = r_1$$

$$i_1(f_1) = i_1(f) = i_1$$

$$|f(t)| \leq \max(|f_1^*(t)|, |f_1(t)|) \quad .$$

Volgens (ii) heeft $f_1(t)$ precies i_1 nulpunten met valuatie r_1. Voor ieder van deze nulpunten t_0 is

$$|f(t_0)| \leq \max(0,|f_1^*(t_0)|) < \varepsilon,$$

hetgeen in tegenspraak is met (**).
Daar f continu is in $|t| \leq r_1$ en Φ volledig is heeft f dus nulpunten in $|t| \leq r_1$.

(ivb) We moeten nog bewijzen dat f precies i_1 nulpunten met valuatie r_1 heeft.
Neem een dalende rij $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ met $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$
Iedere ε_k bepaalt een $f_{1,k}$ als in (iva) met i_1 nulpunten $t_{1,k},\ldots,t_{i_1,k}$ met $|t_{i,k}| = r_1$ $(i = 1,\ldots,i_1)$. Zij $t_{1,k},\ldots,t_{m,k}$ de verschillende hieronder (daat $\lim\limits_{k\to\infty} f_{1,k}(t) = f(t)$ is m onafhankelijk van k). Voor k $k \geq k_0$ zijn er disjuncte omgevingen $U_{1,k},\ldots,U_{m,k}$ voor resp. $t_{1,k},\ldots,t_{m,k}$ te vinden met de eigenschap

$$|f_{1,k}(t)| < \varepsilon_k \Longrightarrow t\in U_{i,k} \quad \text{voor zekere } i\in\{1,\ldots,m\} .$$

Dan geldt:

$$U_{i,k+1} \subset U_{i,k} \quad .$$

Daar $f(t) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{1,k}(t)$ (uniform voor $|t| \leq r_1$) is ieder nulpunt van $f(t)$ bevat in $\bigcap\limits_{k=k_0}^{\infty}$ voor zekere i, f heeft precies m verschillende nulpunten met valuatie r_1.
Indien we definiëren t_0 is l-voudig nulpunt van f d.e.s.d. als geldt

$$f(t) = (t-t_0)^n g(t)$$

met

$$g(t) = \alpha_h' t^h + \alpha_{h+1}' t^{h+1} + \ldots \quad \text{met } \alpha_i'\in\Phi,\ \alpha_h' \neq 0,$$

$$h \geq 0 \text{ en } g(t_0) \neq 0 \ ,$$

dan dienen we nog te bewijzen:

Als $t_{0,k}$ l-voudig nulpunt is van $f_{1,k}(t)$ met $|t_{0,k}| = r_1$, dan is $t_0 = \lim\limits_{k\to\infty} t_{0,k}$ l-voudig nulpunt van $f(t)$.

Indien l = 1, dan zijn we klaar. Stel l > 1.

Daar $f_{1,k}(t)$ een beginstuk is van de machtreeks $f(t)$ en $t_0 = \lim\limits_{k\to\infty} t_{0,k}$ met $t_{0,k} \subset U_{0,k}$, waarbij $U_{0,k} = U_{i,k}$ voor zekere $i \in \{1,\ldots,m\}$, geldt

$$g_{1,k}(t) = \frac{f_{1,k}(t)}{t-t_{0,k}} \to g_1(t) = \frac{f(t)}{t-t_0} \qquad \text{voor } k \to \infty.$$

Verder is $r_1(g_1) = r_1(g_{1,k}) = r_1$ daar $t_{0,k}$ nulpunt is van $g_{1,k}(t)$ en

$$i_1(g_1) = i_1(g_{1,k}) = i_1 - 1 \; .$$

Evenals in bovenstaande kunnen we concluderen dat $g_1(t)$ een nulpunt heeft in $\bigcap\limits_k U_{0,k}$ en wel $\lim\limits_{k\to\infty} t_{0k}$, dus t_0 is nulpunt van $g_1(t)$, dus minstens tweevoudig nulpunt van $f(t)$. Na eindig veel stappen hebben we bewezen dat t_0 l-voudig nulpunt is van $f(t)$. Hiermee is (b) bewezen.

Op analoge wijze tonen we (c) aan.

<u>Gevolg 4.3</u>. Zij $f(t) = \alpha_h t^h + \alpha_{h+1} t^{h+1} + \ldots$, $\alpha_h \neq 0$, $\alpha_i \in \Phi$, $h \geq 0$ en zij R de convergentiestraal van f. Dan heeft f voor alle $r < R$ slechts eindig veel nulpunten t met $|t| \leq r$.

<u>Toepassing 4.4</u>.

$$\psi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{t^{q^j}}{F_j} \qquad \text{heeft enkelvoudig nulpunt in } 0;$$

$$r_1 = \min_{j>0} p^{\frac{jq^j}{q^j-1}} = p^{\frac{q}{q-1}}$$

$$i_1 = q - 1 \; .$$

Dus, $\psi(t)$ heeft $q - 1$ nulpunten t met dgt $= \frac{q}{q-1}$.

$$r_k = p^{k-1+\frac{q}{q-1}} \quad ; \quad i_k = q^k \qquad (k = 2,3,\ldots) .$$

Dus $\psi(t)$ heeft $q^k - q^{k-1}$ nulpunten t met $\mathrm{dgt} = k-1 + \frac{q}{q-1}$ $(k = 2,3,\ldots)$.

<u>Stelling 4.5.</u> (maximum-modulusstelling)

Zij $f(t) = \sum_{n=h}^{\infty} \alpha_n t^n$ met $\alpha_n \in \Phi$, $\alpha_h \neq 0$, $h \geq 0$ een voor $|t| < R$ (evt. $|t| \leq R$) convergente machtreeks. Dan geldt voor alle $r < R$ (resp. $r \leq R$):

$$\sup_{|t|=r} |f(t)| = \max_{n \geq h} |\alpha_n| \, r^n .$$

<u>Bewijs</u>. Daar $|f(t)| \leq \max_{n\geq h} |\alpha_n| \, r^n$ voor alle t met $|t| = r$ geldt

$$\sup_{|t|=r} |f(t)| \leq \max_{n \geq h} |\alpha_n| \, r^n .$$

We moeten nog aantonen dat

$$\sup_{|t|=r} |f(t)| \geq \max_{n \geq h} |\alpha_n| \, r^n . \qquad (4.1)$$

Voor $r = 0$ is de bewering triviaal. Zij $r > 0$.

(1) Zij f een polynoom, $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$ met $\alpha_n \neq 0$. Zij $\tau \in \Phi$ met $|\tau| = r$. Daar $|\Phi|$ dicht ligt in $\mathbb{R}^+$ zijn er $n+1$ verschillende elementen $t_0', t_1', \ldots, t_n'$ in Φ te vinden met $|t_i'| \neq |t_j'|$ en $0 < r-\varepsilon < |t_i'| < r$. Dan zijn $t_i = t_i' + \tau$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ $n+1$ verschillende elementen van Φ met $|t_i| = r$. Beschouw nu de $n+1$ vormen

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j t_i^j = f(t_i) \quad , \quad i = 0,1,\ldots,n .$$

Dit is op te vatten als stelsel lineaire vergelijkingen in $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ met van der Monde determinant $D \neq 0$,

$$|D| = \prod_{0 \leq j < i \leq n} |t_i - t_j| > (r-\varepsilon)^{\frac{1}{2}n(n+1)} .$$

Dan is

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} \frac{D_{ij}\ f(t_i)}{D} ,$$

waarbij D_{ij} een onderdeterminant is van D met termen van de vorm
$c_{ij}\ t_0^{\nu_0}\ t_1^{\nu_1} \ldots t_{j-1}^{\nu_{j-1}}\ t_{j+1}^{\nu_{j+1}} \ldots t_n^{\nu_n}$ met $\nu_i \neq \nu_k$ voor $i \neq k$, $0 < \nu_i \leq n$,
zodat

$$|D_{ij}| \leq \max_i |t_i|^{\frac{1}{2}n(n+1)-j} < r^{\frac{1}{2}n(n+1)-j} .$$

Hieruit volgt

$$|\alpha_j| < \frac{r^{\frac{1}{2}n(n+1)-j} \max_i |f(t_i)|}{(r-\varepsilon)^{\frac{1}{2}n(n+1)}} \leq (1+\varepsilon)\, r^{-j} \sup_{|t|=r} |f(t)| .$$

Daar we ε willekeurig klein kunnen nemen geldt voor $j = 0,1,\ldots,n$

$$|\alpha_j|\ r^j \leq \sup_{|t|=r} |f(t)| .$$

Hiermee is (4.1) aangetoond voor polynomen.

(2) Zij $f(t) = \alpha_h + \alpha_{h+1}t^{h+1} + \ldots$. Daar f hoogstens eindig veel nulpunten heeft in $|t| \leq r$ (gevolgt 4.3) is

$$M = \max_{n \geq h} |\alpha_n|\ r^n > 0 .$$

Zij $N \in \mathbb{N}$ zo bepaald dat $0 < |\alpha_n|\ r^n < \frac{M}{2}$ voor $n > N$ en definieer
$g(t) := \sum_{n=h}^{N} \alpha_n t^n$.
Voor $g(t)$ geldt de stelling dus

$$\sup_{|t|=r} |g(t)| = \max_{h \leq n \leq N} |\alpha_n|\ r^n = M ,$$

zodat $\forall \varepsilon > 0\ \exists t_0 \in \Phi$ met $|t_0| = r$ en

$$|g(t_0)| > M-\varepsilon .$$

Als $\varepsilon < \frac{M}{2}$, dan is

$$\sup_{|t|=r} |f(t)| \geq |f(t_0)| = \max(|g(t_0)|, \sum_{n>N} \alpha_n t_0^n) > M-\varepsilon .$$

Hieruit volgt (4.1).

Opmerking 4.6. Het in stelling 4.5 optredende supremum is een maximum.

Bewijs. $f(t) = \alpha_h t^h + \alpha_{h+1} t^{h+1} + \ldots$

Noteer $f(t) = \alpha_h t^h + \ldots + \alpha_N t^N + f^*(t) = f_1(t) + f^*(t)$,
waarbij N zo gekozen is dat

$$|\alpha_n| \, r^n < \frac{1}{2} \sup_{|t|=r} |f(t)| = \frac{M}{2} \quad \text{voor } n > N.$$

Dus $|f(t)| = |f_1(t)|$.
Stel het supremum wordt niet aangenomen, d.w.z. voor alle t met $|t| = r$ is $|f_1(t)| < M$. Neem dan als in het bewijs van st. 4.5 N+1 punten met valuatie r en bepaal $\alpha_0,\ldots,\alpha_N$ uit

$$\sum_{j=0}^{N} \alpha_j t_i^j = f_1(t_i) \qquad (i = 1,\ldots,N+1) .$$

Dan is

$$|\alpha_j| \leq (1+\varepsilon) \, r^{-j} \max |f(t_i)| < r^{-j} M .$$

Maar dan is $|\alpha_j| \, r^j < M$ voor $j = h,h+1,\ldots$. Dit is in tegenspraak met st. 4.5.

Gevolg 4.7. Als r_1 niet bestaat dan is $\operatorname{Max}_{|t|=r} |f(t)| = |\alpha_0|$ voor alle $r < R$.

Definitie 4.8. Een funktie heet geheel (over Φ) als hij te schrijven is als een voor ieder punt van Φ convergerende machtreeks.

Stelling 4.9. Een gehele funktie f is óf een polynoom óf f is te schrijven als

$$f(t) = \alpha_h t^h \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \frac{t}{\beta_i})^{j_i} ,$$

waarin $\{\beta_i\}$ alle verschillende nulpunten $\neq 0$ van f zijn en j_i de multipliciteit is van β_i.

Bewijs. Stel f is geen polynoom.
Stel f heeft geen nulpunten. Dan is volgens gevolg 4.7

$$\underset{|t|=r}{\text{Max}} \; |f(t)| = |\alpha_0| \qquad \text{voor alle } r. \qquad (*)$$

Daar f geheel is en $\underset{|t|=r}{\text{Max}} \; |f(t)| = \underset{i\geq 0}{\max} \; |\alpha_i| \; r^i$ geldt:

$$\underset{|t|=r}{\max} \; |f(t)| \to \infty \quad \text{als } r \to \infty, \text{ in tegenspraak met } (*).$$

Dus f heeft nulpunten. Volgens stelling 4.2 kunnen we f dan schrijven als

$$f(t) = \alpha_h t^h \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{t}{\beta_i})^{j_i} \, G(t) , \qquad (4.2)$$

waarbij $\beta_1,\ldots,\beta_k$ alle verschillende nulpunten zijn met $|\beta_i| \leq r$ en j_i de multiplicteit is van β_i.
Nu is $G(t)$ weer een gehele funktie, die geen nulpunten heeft voor $|t| \leq r$, dus $G(t)$ heeft nulpunten in $|t| > r$. Door r naar ∞ te laten gaan vinden we een oneindige rij van nulpunten β_i van f.
Uit (4.2) volgt $G(0) = 1$, zodat $G(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \, t^i$.
$G(t)$ heeft geen nulpunten voor $|t| \leq r$, dus $r_1(G) > r$, zodat $|\gamma_i| \; r^i < 1$ voor $i = 1,2,\ldots$.
Wanneer we $\alpha_h t^h \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{t}{\beta_i})^{j_i}$ noteren met $P_r(t)$ dan geldt voor $|t| \leq r$:

$$|f(t) - P_r(t)| = |P_r(t)(G(t)-1)| = |P_r(t)|.|\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i t^i| =$$

$$\leq |f(t)| \underset{i\geq 1}{\max} |\gamma_i| \; |t|^i = |f(t)|.\underset{i\geq 1}{\max} \; (\frac{|t|}{r})^i$$

$$\leq |f(t)|. \frac{|t|}{r} .$$

Bij vaste t is voor r voldoende groot

$$|f(t) - P_r(t)| \leq |tf(t)| \cdot \frac{1}{r} < \varepsilon ,$$

dus

$$f(t) = \lim_{r\to\infty} P_r(t)$$

Hiermee is de bewering bewezen.

Gevolg 4.10. Een niet-constante gehele funktie f neemt iedere waarde aan. Als f geen polynoom is dan neemt f iedere waarde oneindig vaak aan.

Bewijs. Zij $c\in\Phi$. Beschouw dan de gehele funktie $g(t) = f(t) - c$. De bewering volgt direkt door st. 4.9 toe te passen op g.

Gevolg 4.11. Zij $M_f(r) = \max_{|t|=r} |f(t)| = \max_{n\geq h} |\alpha_n|\, r^n$. Dan geldt als $\beta_1,\ldots,\beta_k$ de verschillende nulpunten van f zijn met $|\beta_i| \leq r$ en multipliciteiten i_j:

$$M_f(r) = |\alpha_h|\, r^{h+k} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{|\beta_i|^{j_i}}$$

en als $fg(t) = f(t)g(t)$ dan is

$$M_{fg}(r) = M_f(r).M_g(r) .$$

Toepassing 4.12. $\psi(t)$ is een gehele funktie.
Uit de relatie $\psi(xt) - x\psi(t) = -\psi^q(t)$ volgt: als $E\in\mathbb{F}_q[x]$ en $dgE = n$ dan is $\psi(Et)$ te schrijven als lineair polynoom in $\psi(t)$ met coëfficiënten in $F_q[x]$ en constante term 0: $\psi(Et) = A_0\psi(t) + A_1\psi^q(t) + \ldots + A_n\psi^{q^n}(t)$. Hieruit volgt: als t_0 nulpunt is van $\psi(t)$ dan is ook $\psi(Et_0) = 0$ voor iedere $E\in\mathbb{F}_q[x]$. Zij nu $\xi \neq 0$ een nulpunt van ψ zó dat $|\xi| = r_1$, d.w.z. $d\xi = \frac{q}{q-1}$. Daar er $q^{j+1} - q^j$ polynomen zijn van graad j, bevat de verzameling $\{\xi E \mid E\in F_q[x]\}$ alle nulpunten van ψ en deze zijn enkelvoudig. Volgens st. 4.9 geldt dan

$$\psi(t) = t \prod_E (1 - \frac{t}{E\xi}) .$$

We kunnen ξ hieruit expliciet bepalen als volgt:

$$t \prod_E (1 - \frac{t}{E\xi}) = t \prod_E{}' \prod_{\substack{c\in\mathbb{F}_q \\ c\neq 0}} (1 - \frac{t}{E\xi}) = t \prod_E{}' (1 - \frac{t^{q-1}}{\xi^{q-1}E^{q-1}}) .$$

De coefficient van t^q hierin is $-\sum_E{}' \frac{1}{E^{q-1}\xi^{q-1}}$ en de coefficient van t^q in $\sum_{j=0}^{\infty} (-1) \frac{t^{q^j}}{F_j}$ is $-F_1$,
zodat

$$\xi^{q-1} = F_1 \sum_E{}' \frac{1}{E^{q-1}} .$$

<u>Stelling 4.13</u>. Een gehele funktie f is óf een polynoom óf een transcendente funktie.

<u>Bewijs</u>. Stel f is geen polynoom en f is algebraïsch, d.w.z. er zijn polynomen P_ν zó dat

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(t)\, f^\nu(t) \equiv 0 \qquad \text{met } P_n(t) \not\equiv 0 \text{ en } n \geq 1.$$

Volgens gevolg 4.11 is

$$M_{P_\nu f^\nu}(r) = M_{P_\nu}(r).M_f^\nu(r) \qquad (\nu = 0,1,\dots,n).$$

Zij c_1 de maximale valuatie van de coefficienten van $P_0,\dots,P_n$ en zij $m = \max(dgP_0,\dots,dgP_n)$, dan is

$$M_{P_\nu f^\nu}(r) \leq c_1 r^m M_f^\nu(r) \leq c_1 r^m M_f^{n-1}(r)$$

voor r voldoende groot en $\nu = 0,1,\dots,n-1$.

Daar P_n een polynoom is, is voor r voldoende groot

$$M_{P_n}(r) = \max_{0 \le j \le m} |p_{nj}|\, r^j > r^m ,$$

zodat

$$M_{P_n f^n}(r) = M_{P_n}(r)\, M_f^n(r) > r^m M_f^n(r) .$$

Daar f geheel is is $\lim_{r\to\infty} M_f(r) = \infty$, zodat voor r voldoende groot

$$M_{P_n f^n}(r) > c_1 r^m M_f^{n-1}(r) . \qquad (*)$$

Uit $\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(t) f^\nu(t) \equiv 0$ volgt

$$M_{P_n f^n}(r) = \max_{|t|=r} \Big|- \sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu(t) f^\nu(t)\Big| \le$$

$$\max_{0\le\nu\le n-1} M_{P_\nu f^\nu}(r) \le c_1 r^m M_f^{n-1}(r)$$

hetgeen in tegenspraak is met (*).

5. Besselfunkties

Naar analogie van de klassieke Besselfunkties, gedefinieerd door

$$J_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\frac{z}{2})^{n+2j}}{j!(n+j)!} \qquad (n\in\mathbb{Z},\ z\in\mathbb{C})$$

introduceerde L. Carlitz [3] de funktie

$$J_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{t^{q^{n+r}}}{F_{n+r} F_r^{q^n}} \qquad (n = 0,1,2,\ldots) \qquad (5.1)$$

$J_n(t)$ is een lineaire funktie die voor alle $t\in\Phi$ convergeert. Volgens stelling 4.2 heeft $J_n(t)$ in $t = 0$ een nulpunt van de orde q^n en $q^{n+k} - q^{n+k-1}$ nulpunten t met dgt $= n+2(k-1) + \frac{2q}{q-1}$ $(k = 1,2,\ldots)$ en dit zijn alle nulpunten van $J_n(t)$.

Wanneer we definiëren

$$F_n^{-1} = 0 \qquad\qquad \text{voor } n = -1,-2,\dots ,$$

dan heeft bovenstaande definitie van $J_n(t)$ ook betekenis voor negatieve n.

Uit definitie (5.1) volgt direkt

$$J_{-n}(t) = (-1)^n \{J_n(t)\}^{q^{-n}} \quad (n \geq 0, \text{ geheel}). \tag{5.2}$$

Voor de klassieke Besselfunktie's bestaat de betrekking

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

In het klassieke geval is $J_n(z)$ de n^{de} coëfficiënt in de Laurent-ontwikkeling van $e^{\frac{1}{2}z(y-y^{-1})}$, nl.

$$e^{\frac{1}{2}z(y-y^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\, y^n .$$

De funktie

$$G(u) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^{q^{-r}}}{F_r^{q^{-r}}} ,$$

welke convergeert voor alle $u\in\Phi$ en lineair is, voldoet voor alle t en u aan de relatie

$$\psi(tG(u)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n(t)\, u^{q^n} ,$$

en is dus voortbrengende funktie van $J_n(t)$.

Reccurentieformules: in het klassieke geval luiden deze als volgt:

$$\begin{cases} J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \dfrac{2n}{z} J_n(z) \\[2ex] J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n'(z) . \end{cases}$$

Deze formules kunnen worden afgeleid door

$$e^{\frac{1}{2}z(y-y^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\, y^n$$

resp. naar y en naar z de differentieren.

Uit (5.1) volgt dat

$$J_n(xt) - xJ_n(t) = J^q_{n-1}(t) \; . \qquad (5.3)$$

Dit geldt voor alle $n \in Z$ en evenzo

$$\Delta^r J_n(t) = J^{q^r}_{n-r}(t) \; . \qquad (5.4)$$

Anderzijds volgt uit (5.1) dat

$$J_n(xt) - x^{q^n} J_n(t) = -J_{n+1}(t) \; . \qquad (5.5)$$

Wanneer we $J_n(xt)$ uit (5.3) en (5.5) elimineren dan krijgen we de volgende betrekking tussen 3 opeenvolgende "Besselfunkties":

$$J_{n+1}(t) - (x^{q^n} - x)J_n(t) + J^q_{n-1}(t) = 0 \qquad (5.6)$$

Formule (5.3) geeft een verband tussen ΔJ_n en J_{n-1}. Uit de klassieke recurrentieformules valt gemakkelijk af te leiden dat met de definitie

$$H_n(z) = z^n J_n(z)$$

waarin $J_n(z)$ de klassieke Besselfunktie is, geldt

$$\frac{d}{dz} H_n(z) = zH_{n-1}(z) \; .$$

Vergelijk dit met (5.3).

Evenzo bestaat de betrekking:

$$H_{n+1}(z) - 2nH_n(z) + z^2 H_{n-1}(z) = 0 \quad ;$$

vergelijk deze met (5.6).

Operatorvergelijking: de differentiaalvergelijking van Bessel luidt a.v.:

$$y''(z) + \frac{1}{z}\, y'(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) y(z) = 0 \ .$$

Deze is af te leiden uit de beide recurrente betrekkingen. We kunnen uit de beide betrekkingen voor $H_n(z)$ afleiden:

$$H_n''(z) = -H_n(z) + \frac{2n-1}{z}\, H_n'(z) \ .$$

Uit de betrekkingen (5.3) en (5.6) leiden we af:

$$\Delta^2 J_n(t) = -J_n^q(t) + (x^{q^n} - x^q)\, \Delta J_n(t) \ . \qquad (5.7)$$

Dit kunnen we ook schrijven in de vorm:

$$J_n(x^2 t) - (x^{q^n} + x)\, J_n(xt) + x^{q^n+1}\, J_n(t) = -J_n^q(t) \ .$$

Expansieformule: We hebben reeds opgemerkt dat $J_n(t)$ voor $n \geq 0$ een lineaire funktie is van de in lemma 2.1 gegeven vorm, dus formeel geldt:

$$J_n(tu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Delta^j J_n(u)}{F_j}\, \psi_j(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{J_{n-j}^{q^j}(u)}{F_j}\, \psi_j(t) \ \ldots\ldots \qquad (5.8)$$

Deze expansieformule is evenals de expansieformule voor ψ belangrijk in de beschouwingen van transcendentie-eigenschappen.

Literatuur

[1] N. Bourbaki, Algèbre Commutative Ch. VI.
Hermann, Paris 1964.

[2] L. Carlitz, On certain functions connected with polynomials in a Galois field.
Duke Math. J. 1 (1935), 137-168.

[3] L. Carlitz, Some special functions over GF(q,x).
Duke Math. J. 27 (1960), 139-158.

[4] E.H. Moore, A two-fold generalization of Fermat's theorem.
Bull. Amer. Math. Soc. 2 (1896), 189-199.

[5] W. Schöbe, Beiträge zur Funktionentheorie in nichtarchimedisch bewerteten Körpern.
Helios-Verlag, Münster, 1930.

[6] L.I. Wade, Remarks on the Carlitz ψ-functions.
Duke Math. J. 13 (1946), 71-78.

[7] B.L. van der Waerden, Algebra I.
Springer, Berlin, 1960.

[8] G.N. Watson, A Treatise on the Theory of Besselfunctions.
Cambridge, 1944.